

На правах рукописи



БОГАЧЕВ Василий Евгеньевич

**РАЗРАБОТКА АЛГОРИТМОВ И ПРОГРАММ  
СИМВОЛЬНО-ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ  
КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ**

Специальность 05.13.18 — Математическое моделирование, численные методы  
и комплексы программ

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Белгород 2013

Работа выполнена в Федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Белгородский государственный национальный исследовательский университет» (НИУ «БелГУ»)

**Научный руководитель:**

доктор физико-математических наук, профессор  
Чеканов Николай Александрович

**Официальные оппоненты:**

доктор физико-математических наук, профессор,  
Виницкий Сергей Ильич,  
Объединенный институт ядерных исследований,  
Лаборатория теоретической физики  
им. Н.Н. Боголюбова, ведущий научный сотрудник

доктор физико-математических наук, профессор,  
Почетный работник высшего профессионального образования РФ  
Брусенцев Александр Григорьевич,  
Белгородский государственный технологический университет  
им. В.Г. Шухова, заведующий кафедрой высшей математики

**Ведущая организация:**

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Государственный университет – учебно-научно-производственный комплекс»

Защита диссертации состоится 1 июня 2013 г. в 15<sup>00</sup> часов на заседании диссертационного совета Д 212.015.04 при ФГАОУ «Белгородский государственный национальный исследовательский университет», 308015, г. Белгород, ул. Победы, 85.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГАОУ «Белгородский государственный национальный исследовательский университет» по адресу: 308015, г. Белгород, ул. Победы, 85.

Автореферат разослан “ \_\_\_\_ ” апреля 2013 г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета,



В.А. Беленко

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность работы.** Большинство задач классической механики в форме обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений и их систем не могут быть решены в явном аналитическом виде, поэтому разработаны и разрабатываются различные приближенные методы и прямые численные расчеты.

Перспективным направлением математического моделирования является разработка гибридных или комбинированных методов, в которых вначале производятся аналитические вычисления с последующими, при необходимости, численными расчетами с использованием современных известных математических систем компьютерной алгебры, например, Maple, Reduce, Mathematica и других.

В частности, нормализация и построение формальных интегралов движения для даже одномерных гамильтоновых систем требует крайне трудоемких вычислений, которые практически невыполнимы без использования ЭВМ. В диссертационной работе разработаны алгоритмы и составлены программы в системе Maple для символьно-численных вычислений нормальной формы Биркгофа-Густавсона и приближенных интегралов движения для автономных гамильтоновых систем с произвольным конечным числом степеней свободы.

Для двумерных консервативных гамильтоновых систем на основе метода Биркгофа-Густавсона разработан алгоритм и составлена программа в среде Maple, с помощью которой можно восстановить структуру фазового пространства (сечения Пуанкаре) для энергии, не превышающей ее критического значения до перехода системы в хаотический режим движения.

Как известно, знание функции Грина, если она существует, позволяет, в частности, вычислить решение линейного неоднородного дифференциального уравнения с заданными краевыми условиями, а также найти собственные значения и функции краевой задачи.

Хотя в современной науке и технике чаще всего используются линейные дифференциальные уравнения второго и четвертого порядков, тем не менее очень важно знать решения линейных дифференциальных уравнений третьего порядка, которые, например, позволяют найти решения нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка. Одно из таких нелинейных уравнений было независимо предложено в работах Милна в 1930 году и Пинни в 1950 году, которое нашло свое применение в различных разделах математики и физики. На самом деле, это нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка и его общее решение впервые было рассмотрено в работе В.П. Ермакова в 1880 году.

Для построения функции Грина линейного обыкновенного дифференциального уравнения требуется знать необходимое количество линейно независимых решений заданного уравнения. Нахождение таких решений, которые чаще всего не выражаются через элементарные функции, представляет сложную вычислительную задачу.

Поэтому в диссертационной работе в направлении, сочетающим

предварительные символьные вычисления с последующим численным расчетом, были разработаны способы, алгоритмы и составлены программы символьно-численного построения функции Грина для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго и третьего порядков.

Следовательно, разработка новых методов и подходов при использовании компьютерных систем для символьно-численных вычислений, например Maple, к нахождению решений дифференциальных уравнений и их систем является актуальной проблемой.

**Целью диссертационного исследования является** разработка способов, алгоритмов и программ для символьно-численного вычисления нормальной формы и приближенных интегралов движения консервативных гамильтоновых систем с произвольным числом степеней свободы и их применением к построению сечений Пуанкаре и квантованию двумерных гамильтоновых систем, а также символьно-численного построения функции Грина для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго и третьего порядков.

Для достижения этой цели были сформулированы и решены следующие задачи:

1) на основе метода Биркгофа-Густавсона разработать алгоритм и составить программную реализацию для символьно-численного вычисления нормальной формы и приближенных интегралов движения для гамильтоновых систем с произвольным конечным числом степеней свободы;

2) применение нормальной формы Биркгофа-Густавсона и приближенного интеграла движения для построения в аналитическом виде сечений Пуанкаре, а также для квантования классических гамильтоновых систем с двумя степенями свободы;

3) разработка алгоритмов и составление программ для символьно-численного построения функции Грина для краевых задач второго порядка в случаях а) система Maple допускает без наличия правильных особых точек построение двух линейно независимых решений заданной краевой задачи в явном аналитическом виде и б) при наличии регулярных особых точек, когда линейно независимые решения вычисляются в виде обобщенных степенных рядов;

4) разработка алгоритмов и составление программ для символьно-численного построения функции Грина для краевых задач третьего порядка в случаях а) система Maple допускает без наличия особых точек построение трех линейно независимых решений заданной краевой задачи в явном аналитическом виде и б) когда линейно независимые решения вычисляются в виде степенных рядов;

5) применение составленных программ в пунктах 3) и 4) к решению ряда краевых задач и сравнению полученных результатов с результатами, для которых имеется точное решение.

**Методы исследования.** В работе использованы методы теории обыкновенных дифференциальных уравнений, методы математического моделирования, методы вычислительной математики, пакеты компьютерных

прикладных программ.

**Научную новизну работы составляет следующее:**

1) при помощи программ, составленных на основе предложенных алгоритмов, исследованы гамильтоновы системы с двумя, тремя и четырьмя степенями свободы для которых получены нормальная форма и все имеющиеся приближенные интегралы движения;

2) для гамильтоновых систем с двумя степенями свободы получены в аналитическом виде выражения для сечений Пуанкаре и показано, что построенные таким образом сечения Пуанкаре хорошо воспроизводят при произвольных значениях полной энергии для интегрируемых систем, а для неинтегрируемых только при энергиях, не превышающих энергию перехода от регулярного движения к хаотическому;

3) для краевых задач линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго и третьего порядков разработаны алгоритмы и составлены программы символьно-численного вычисления соответствующих функций Грина, а также выполнено исследование некоторых краевых задач;

4) для краевой задачи дифференциальных уравнений второго порядка при наличии правильных особых точек предложен метод построения функции Грина.

**Практическая значимость работы** определяется тем, что разработанные алгоритмы и их программные реализации могут быть использованы для нахождения приближенных решений в аналитическом виде с возможностью последующих численных расчетов и анализа в различных областях науки, где применяются обыкновенные линейные и нелинейные дифференциальные уравнения и их системы.

Результаты данного исследования могут быть также внедрены в специальные учебные курсы по математическим методам и математическому моделированию нелинейных явлений.

Значимость для науки результатов исследований заключается в применении развитых методов приближенного решения нелинейных многомерных гамильтоновых систем, а также обыкновенных линейных дифференциальных уравнений второго и третьего порядков с помощью функции Грина и анализе полученных результатов.

**Область исследования.** Содержание диссертации соответствует паспорту специальности 05.13.18 «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» по следующим областям исследований:

п. 1. Разработка новых математических методов моделирования объектов и явлений;

п. 2. Развитие качественных и приближенных аналитических методов исследования математических моделей;

п. 3. Разработка, обоснование и тестирование эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий.

### **Положения выносимые на защиту:**

1) алгоритм и программа символьно-численного вычисления нормальной формы Биркгофа-Густавсона и интегралов движения для консервативной гамильтоновой системы с произвольным числом степеней свободы;

2) алгоритм и программа символьно-численных расчетов сечений Пуанкаре для консервативных гамильтоновых систем с двумя степенями свободы;

3) алгоритмы и программы символьно-численного построения функции Грина для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго и третьего порядков;

4) метод символьно-численного построения функции Грина краевой задачи для дифференциальных уравнений второго порядка при наличии правильных особых точек в виде обобщенных степенных рядов.

**Достоверность выводов и рекомендаций** обоснована корректным использованием методов теории дифференциальных уравнений и теории классической механики, методов вычислительной математики и пакетов компьютерных прикладных программ, а также контролируемой точностью численных расчетов при помощи разработанных программ.

**Личный вклад соискателя.** Все изложенные в диссертации результаты исследований получены либо соискателем лично, либо при его непосредственном участии.

**Апробация результатов диссертационного исследования.** Основные положения и результаты диссертационных исследований докладывались и обсуждались на следующих конференциях:

международной молодежной научной конференции «XXXV Гагаринские чтения», Москва, 7-11 апреля, 2009 г.; международной молодежной научной конференции «XXXVI Гагаринские чтения», Москва, 6-10 апреля, 2010 г.; на VIII международной научно-практической конференции «Фундаментальные и прикладные исследования в системе образования», Тамбов, 26 февраля, 2010 г.; шестой региональной научно-практической конференции студентов и аспирантов, Старый Оскол, 20-21 апреля, 2010 г.; XII Международной научно-практической конференции «Наука и современность – 2011», Новосибирск, 23 августа, 2011 г.; третьей международной конференции «Quantum Electrodynamics and Statistical Physics», 29 августа-2 сентября, 2011 г., Харьков, Украина; международной конференции по математическому моделированию МКММ\_2011, Херсон, 12-17 сентября, 2011 г.; международной конференции «Прикладная геометрия, графические технологии и дизайн», Украина, г. Полтава, 17-20 апреля 2012 г.; 15-м семинаре по компьютерной алгебре 23-24 мая, 2012 г., Дубна, Московская область; международной конференции по математическому моделированию МКММ-2012, Херсон, 17-22 сентября, 2012 г.; третьей международной конференции «Математическое моделирование и дифференциальные уравнения», 17-22 сентября 2012 года, Брест; всероссийской молодежной конференции «Теория и практика системного анализа», Белгород, 1-3

октября, 2012 г.

**Публикации.** Основные результаты диссертационной работы отражены в 15 опубликованных научных работах, в том числе в двух статьях в изданиях, рекомендованных ВАК РФ, и получено 2 свидетельства об государственной регистрации программ для ЭВМ.

**Объем и структура работы.** Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы и 6 приложений. Работа изложена на 184 страницах машинописного текста, включая 53 рисунка и список литературных источников из 126 наименований.

## СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

**Во введении** обосновывается актуальность диссертационного исследования, формулируется его основная цель и решаемые задачи, положения выносимые на защиту, дается обзор содержания глав.

**Глава 1. Символьно-численные вычисления нормальной формы и приближенных интегралов движения для гамильтоновых систем с произвольным числом степеней свободы.**

В разделе 1.1 описан метод Биркгофа-Густавсона. Пусть дана классическая система с  $n$  степенями свободы, функцию Гамильтона которой можно записать в виде полиномиального разложения

$$H(q, p) = \sum_{k=1}^n \frac{\omega_k}{2} (p_k^2 + q_k^2) + \sum_{S=3}^{\infty} \sum_{\substack{l_1+\dots+l_n+ \\ +m_1+\dots+m_n=S}} C_{l_1, \dots, l_n, m_1, \dots, m_n} p_1^{l_1} p_2^{l_2} \dots p_n^{l_n} \cdot q_1^{m_1} q_2^{m_2} \dots q_n^{m_n}, \quad (1)$$

где  $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$  и  $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$  –  $n$ -мерные канонически сопряженные переменные,  $C_{l_1, \dots, l_n, m_1, \dots, m_n}$  – известные коэффициенты. Частоты  $\omega_k$  могут быть как несоизмеримыми (нерезонансными), так и соизмеримыми (резонансными), для последних из которых имеется  $r$  линейно независимых соотношений

$$\sum_{k=1}^{k=n} a_{ik} \omega_k = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, r, \quad (2)$$

где матричные элементы  $a_{ik}$  – целые числа.

После выполнения канонических преобразований  $q = \xi + \dots$ ,  $p = \eta + \dots$ , где  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  и  $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$ , исходная функция Гамильтона (1) приводится к нормальной форме  $G(\xi, \eta)$ , для которой выполняется условие

$$DG(\xi, \eta) = 0, \quad D = \sum_{k=1}^n \omega_k \left( \eta_k \frac{\partial}{\partial \xi_k} - \xi_k \frac{\partial}{\partial \eta_k} \right). \quad (3)$$

Функция Гамильтона  $H(q, p)$ , ее нормальная форма  $G(\xi, \eta)$  и производящая функция  $F(q, \eta) = q\eta + W(q, \eta)$  представляются следующими суммами по однородным полиномам степени  $S$ :

$$H(q, p) = \sum_{S=2} H^{(S)}(q, p), \quad H^{(S)}(q, p) = \sum_{|l|+|m|=S} h_{lm} q^l p^m, \quad (4a)$$

$$G_{SMAX}(\xi, \eta) = \sum_{S=2} G^{(S)}(\xi, \eta), \quad G^{(S)}(\xi, \eta) = \sum_{|l|+|m|=S} \gamma_{lm} \xi^l \eta^m, \quad (4б)$$

$$W_{SMAX}(q, \eta) = \sum_{S=2}^{SMAX} W^{(S)}(q, \eta), \quad W^{(S)}(q, \eta) = \sum_{|l|+|m|=S} w_{lm} q^l \eta^m, \quad (4в)$$

здесь величины  $h_{lm}$  известны, но  $\gamma_{lm}$  и  $w_{lm}$  являются неизвестными коэффициентами, которые должны быть вычислены и введено обозначение  $|k| = k_1 + k_2 + \dots + k_n$ ,  $k = l, m$ .

Для нахождения однородных полиномов  $W^{(S)}$  и  $G^{(S)}$  степени  $S$  необходимо решить основное уравнение

$$D(q, \eta)W^{(S)}(q, \eta) = -H^{(S)}(q, \eta) + G^{(S)}(q, \eta) \text{ при } q = \xi. \quad (5)$$

Вычислив на  $(S-2)$  шаге, начиная с  $S=3$ , производящий полином  $W^{(S)}$  и нормальную форму  $G^{(S)}$ , то есть коэффициенты  $\gamma_{lm}$  и  $w_{lm}$ , найдем последующие слагаемые более высокой степени, чем  $S$ , по формуле

$$G^{(i)}(\xi, \eta) = H^{(i)}(\xi, \eta) + \sum \frac{1}{k!} \left( \left( \frac{\partial W^{(s)}}{\partial \xi} \right)^k \left( \frac{\partial^{k|} H^{(l)}}{\partial \eta^k} \right) - \left( \frac{\partial W^{(s)}}{\partial \eta} \right)^k \left( \frac{\partial^{k|} G^{(l)}}{\partial \xi^k} \right) \right), \quad (6)$$

где  $i = S+1, S+2, \dots$ , а суммирование выполняется при выполнении следующих условий  $l - |k| + |k|(S-1) = i$ ,  $1 \leq |k| \leq l < i$ ,  $l \geq 2$ ,  $S \geq 3$ ,  $s \geq 3$ , где  $k! = k_1! k_2! \dots k_n!$ , далее опять решаем основное уравнение (5) для последующих степеней  $S$ . Количество таких повторений определяет порядок приближения  $SMAX$ .

Решение основного уравнения (5) проводим в комплексных переменных  $q_v = (x_v + iy_v) / \sqrt{2}$ ,  $\eta_v = i(x_v - iy_v) / \sqrt{2}$ ,  $i = \sqrt{-1}$ ,  $v = 1, 2, \dots, n$ , в которых оператор нормальной формы (3) является диагональным

$$\tilde{D}(x, y) = i \sum_{v=1}^{v=n} \omega_v \left( x_v \frac{\partial}{\partial x_v} - y_v \frac{\partial}{\partial y_v} \right), \quad (7)$$

а основное уравнение (5) примет вид

$$\tilde{D}(x, y) \tilde{W}^{(S)}(x, y) = -\tilde{H}^{(S)}(x, y) + \tilde{G}^{(S)}(x, y). \quad (8)$$

Линейный оператор  $\tilde{D}(x, y)$  определен в функциональном пространстве всех однородных полиномов степени  $S$  от  $2n$  переменных  $(x, y)$ , где  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  –  $n$ -мерные векторы. Размерность этого функционального пространства определяется по формуле  $M = (2n + S - 1)! / ((2n - 1)! S!)$  и однородные мономы степени  $S$  вида  $\Phi^{(S)} \equiv x^l y^m = x_1^{l_1} x_2^{l_2} \dots x_n^{l_n} y_1^{m_1} y_2^{m_2} \dots y_n^{m_n}$ ,  $(S = |l| + |m|)$  образуют в нем базис. Мономы  $\tilde{\Phi}^{(S)}$  являются собственными функциями оператора нормальной формы  $\tilde{D}(x, y)$ , то есть



$$\tilde{D}\tilde{\Phi}^{(S)} = \left[ i \sum_v \omega_v (m_v - l_v) \right] \tilde{\Phi}^{(S)}. \quad (9)$$

Тогда решение основного уравнения (8) в комплексных переменных  $(x, y)$  формально можно записать в виде

$$\tilde{W}^{(S)} = \tilde{D}^{-1} \left[ \tilde{G}^{(S)} - \tilde{H}^{(S)} \right], \quad \tilde{D}^{-1}\tilde{\Phi}^{(S)} = \frac{\tilde{\Phi}^{(S)}}{i \sum_v \omega_v (m_v - l_v)} \quad (10)$$

Поскольку нормальная форма  $\tilde{G}^{(S)}$  пока еще не определена, то выбираем ее так, чтобы производящий полином  $\tilde{W}^{(S)}$  канонического преобразования был конечным, то есть не имел полюсов типа  $\sum \omega_v (m_v - l_v)$ . Так как полином  $\tilde{H}^{(S)}(x, y)$  может быть однозначно представлен в виде суммы однородных полиномов  $\tilde{H}^{(S)} = \tilde{N}^{(S)} + \tilde{R}^{(S)}$ , где  $\tilde{D}\tilde{N}^{(S)} = 0$ ,  $\tilde{D}\tilde{R}^{(S)} \neq 0$ , получаем нормальную форму  $\tilde{G}^{(S)} = N^{(S)}$  и одновременно алгебраическое уравнение для вычисления производящего полинома  $\tilde{W}^{(S)} = \tilde{D}\tilde{R}^{(S)}$ .

Из анализа соотношения  $\sum \omega_v (m_v - l_v) = 0$  следует, что оно выполняется: а) если  $m_v = l_v$  и частоты  $\omega_v$  несоизмеримы (случай Биркгофа), б) если при  $m_v \neq l_v$  имеются резонансные соотношения типа  $\sum n_v \omega_v = 0$ ,  $n_v$  – целые числа (случай Густавсона).

Совершая обратное преобразование от комплексных переменных  $(x, y)$  к исходным, окончательно находим нормальную форму  $G^{(S)}(\xi, \eta)$  и производящий полином  $W^{(S)}(q, \eta)$  в  $S$ -ом порядке приближения по соответствующим переменным.

При наличии резонансных соотношений (2) существует  $(n - r)$  приближенных независимых интегралов движения вида

$$I(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \frac{\mu_i}{2} (\xi_i^2 + \eta_i^2), \quad (11)$$

где  $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$  есть любой  $n$ -мерный вещественный вектор такой, что выполняются условия

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} \mu_k = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, r. \quad (12)$$

Таким образом, наличие резонансных соотношений (2) уменьшает количество независимых интегралов движения, и исходная гамильтонова система (1) является неинтегрируемой согласно теореме Лиувилля. Выполняя обратное преобразование  $(\xi, \eta) \rightarrow (q, p)$ , получаем интегралы движения в исходных канонически сопряженных переменных  $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ ,  $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ .

В разделе 1.2 выполнена нормализация одномерного ангармонического осциллятора с четвертой степенью нелинейности без применения ЭВМ и показана трудоемкость процедуры нормализации.

В разделе 1.3 дано описание разработанного алгоритма для символьно-численного вычисления нормальной формы Биркгофа-Густавсона и интегралов движения гамильтоновых систем с произвольным числом степеней свободы, на основе которого составлена программа BIGMA в среде Maple.

В разделе 1.4 были выполнены вычисления нормальной формы и приближенных интегралов движения для тринадцати различных функций Гамильтона. Из-за громоздкости полученных выражений ниже приводим только нормальную форму и интеграл движения для функции Гамильтона

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + V(q_1, q_2), \quad (13)$$

$$V(q_1, q_2) = \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2) + b \left( q_1^2 q_2 + \frac{1}{3} q_2^3 \right) + c (q_1^4 + 6q_1^2 q_2^2 + q_2^4), \quad (14)$$

поверхность потенциальной энергии  $V(q_1, q_2)$  которой при значениях параметров  $b = 1/4$ ,  $c = 1/288$  имеет четыре локальных минимума, один максимум и четыре седловых точки (изолинии показаны на Рис. 1).

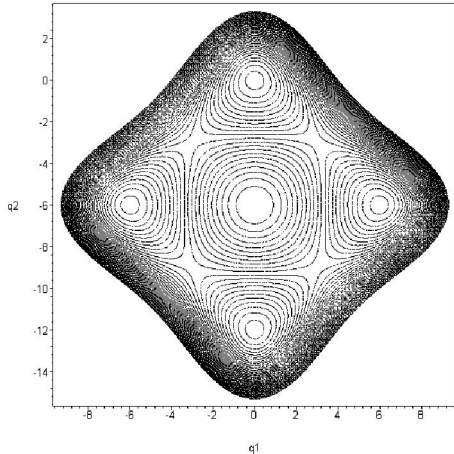


Рис. 1. Изолинии поверхности потенциальной энергии (13б) при значениях параметров  $b = 1/4$ ,  $c = 1/288$

Были вычислены нормальная форма, в том числе и в переменных действие-угол  $(I_1, I_2, \phi_1, \phi_2)$ , до степени  $SMAX = 8$ :

$$G_8 = G^{(2)} + G^{(3)} + G^{(4)} + G^{(5)} + G^{(6)} + G^{(7)} + G^{(8)}, \quad (15)$$

где

$$G^{(2)} = \frac{1}{2}(\eta_1^2 + \xi_1^2) + \frac{1}{2}(\eta_2^2 + \xi_2^2),$$

$$G^{(4)} = \left( \frac{3}{8}c - \frac{5}{48}b^2 \right) \left( (\xi_1^2 + \xi_2^2)^2 + (\eta_1^2 + \eta_2^2)^2 + 4(\xi_1 \xi_2 + \eta_1 \eta_2)^2 + 2(\xi_1^2 + \xi_2^2)(\eta_1^2 + \eta_2^2) \right),$$

$$G^{(6)} = \left( \frac{75}{96}b^2c - \frac{51}{96}c^2 - \frac{235}{3456}b^4 \right)$$

$$\left( (\xi_1^2 + \xi_2^2)^3 + (\eta_1^2 + \eta_2^2)^3 + 3(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \eta_1^2 + \eta_2^2) \left( 4(\xi_1 \xi_2 + \eta_1 \eta_2)^2 + (\xi_1^2 + \xi_2^2)(\eta_1^2 + \eta_2^2) \right) \right),$$

$$G^{(8)} = \left( -\frac{38585}{497664}b^6 - \frac{8315}{1536}c^2b^2 + \frac{12925}{9216}cb^4 + \frac{375}{256}c^3 \right) \left( (\xi_1^2 + \xi_2^2)^4 + (\eta_1^2 + \eta_2^2)^4 + 16(\xi_1 \xi_2 + \eta_1 \eta_2)^4 + 2(\xi_1^2 + \xi_2^2)(\eta_1^2 + \eta_2^2) \left( 3(\xi_1^2 + \xi_2^2)(\eta_1^2 + \eta_2^2) + 2(\xi_1^2 + \xi_2^2)^2 + 2(\eta_1^2 + \eta_2^2)^2 \right) + 24(\xi_1 \xi_2 + \eta_1 \eta_2)^2 (\xi_1^2 + \xi_2^2 + \eta_1^2 + \eta_2^2)^2 \right),$$

$$G^{(3)} = 0, \quad G^{(5)} = 0, \quad G^{(7)} = 0,$$

$$\begin{aligned}
G(I_1, I_2, \phi_2) = & 2I_1 + \left(-\frac{5}{2}b^2 + 9c\right)I_1^2 + \left(\frac{5}{24}b^2 - \frac{3}{4}c\right)I_2^2 + \left(\frac{235}{144}b^4 + \frac{51}{4}c^2 - \frac{75}{4}cb^2\right)I_2^2I_1 + \\
& + \left(-\frac{1175}{108}b^4 + 125cb^2 - 85c^2\right)I_1^3 + \left(\frac{1125}{128}c^3 + \frac{12925}{1536}cb^4 - \frac{38585}{82944}b^6 - \frac{8315}{256}c^2b^2\right)I_2^4 + \\
& + \left(\frac{192925}{10368}b^6 - \frac{5625}{16}c^3 + \frac{41575}{32}c^2b^2 - \frac{64625}{192}cb^4\right)I_2^2I_1^2 + \\
& + \left(-\frac{291025}{48}c^2b^2 + \frac{452375}{288}cb^4 + \frac{13125}{8}c^3 - \frac{1350475}{15552}b^6\right)I_1^4 + \left(3c - \frac{5}{6}b^2\right)\cos(2\phi_2)I_1^2 + \\
& + \left(\frac{5}{24}b^2 - \frac{3}{4}c\right)\cos(2\phi_2)I_2^2 + \left(-51c^2 + 75cb^2 - \frac{235}{36}b^4\right)\cos(2\phi_2)I_1^3 + \\
& + \left(\frac{235}{144}b^4 + \frac{51}{4}c^2 - \frac{75}{4}cb^2\right)\cos(2\phi_2)I_2^2I_1 + \\
& + \left(\frac{8315}{6}c^2b^2 + \frac{38585}{1944}b^6 - \frac{12925}{36}cb^4 - 375c^3\right)\cos(2\phi_2)I_2^2I_1^2 + \\
& + \left(-\frac{375}{16}c^3 + \frac{8315}{96}c^2b^2 - \frac{12925}{576}cb^4 + \frac{38585}{31104}b^6\right)\cos(4\phi_2)I_2^2I_1^2 + \\
& + \left(-\frac{58205}{12}c^2b^2 + \frac{90475}{72}cb^4 - \frac{270095}{3888}b^6 + \frac{2625}{2}c^3\right)\cos(2\phi_2)I_1^4 + \\
& + \left(-\frac{8315}{48}c^2b^2 - \frac{38585}{15552}b^6 + \frac{12925}{288}cb^4 + \frac{375}{8}c^3\right)\cos(4\phi_2)I_1^4 + \\
& + \left(\frac{12925}{1152}cb^4 - \frac{38585}{62208}b^6 - \frac{8315}{192}c^2b^2 + \frac{375}{32}c^3\right)\cos(2\phi_2)I_2^4 + \\
& + \left(-\frac{38585}{248832}b^6 + \frac{12925}{4608}cb^4 - \frac{8315}{768}c^2b^2 + \frac{375}{128}c^3\right)\cos(4\phi_2)I_2^4, \quad (16)
\end{aligned}$$

а также интеграл движения до степени  $SMAH = 6$ :

$$\begin{aligned}
I = & -\frac{35}{3456}(11b^4 - 108b^2c + 108c^2)(p_2^6 + 15p_1^2p_2^4 + 15p_1^4p_2^2 + p_1^6 + 3q_2^2p_2^4 + \\
& + 18q_2^2p_1^2p_2^2 + 3q_2^2p_1^4 + 24q_1q_2p_1p_2^3 + 24q_1q_2p_1^3p_2 + 3q_1^2p_2^4 + 18q_1^2p_1^2p_2^2 + 3q_1^2p_1^4) - \\
& - \frac{1}{1152}(2052c^2 + 385b^4 - 3300b^2c) \\
& (q_2^4p_2^2 + q_2^4p_1^2 + 8q_1q_2^3p_1p_2 + 6q_1^2q_2^2p_2^2 + 6q_1^2q_2^2p_1^2 + 8q_1^3q_2p_1p_2 + q_1^4p_2^2 + q_1^4p_1^2) - \\
& - \frac{1}{3456}(-2916b^2c + 545b^4 - 1404c^2)(q_2^2 + q_1^2)(q_2^4 + 14q_1^2q_2^2 + q_1^4) - \frac{1}{144}(5b^2 - 18c) \\
& (3p_2^4 + 18p_1^2p_2^2 + 3p_1^4 + 6q_2^2p_2^2 + 6q_2^2p_1^2 + 3q_2^4 + 24q_1q_2p_1p_2 + 6q_1^2p_2^2 + 6q_1^2p_1^2 + \\
& + 3q_1^4 + 4bq_2^3p_2^2 + 4bq_2^3p_1^2 + 4bq_2^5 + 24bq_1q_2^2p_1p_2 + 12bq_1^2q_2p_2^2 + 12bq_1^2q_2p_1^2 + 40bq_1^2q_2^3 + \\
& + 18q_1^2q_2^2 + 8bq_1^3p_1p_2 + 20bq_1^4q_2). \quad (17)
\end{aligned}$$

## Глава 2. Применение метода нормальных форм Биркгофа-Густавсона к аналитическому построению сечений Пуанкаре и квантованию гамильтоновых систем с двумя степенями свободы.

В разделе 2.1 для гамильтоновых систем с двумя степенями свободы предложен способ аналитического построения сечений Пуанкаре с применением метода нормальных форм, на основе которого разработан алгоритм и составлена соответствующая программа SPOMA в среде Maple.

В настоящее время нет универсальных методов для определения является ли заданная гамильтонова система интегрируемой или неинтегрируемой. Для гамильтоновых систем с двумя степенями свободы крайне удобным методом определения интегрируемости является метод сечений А. Пуанкаре.

Для системы дифференциальных уравнений Гамильтона с двумя степенями свободы фазовое пространство является четырехмерным, но при заданной полной энергии  $E$  в силу ее сохранения движение фазовой точки  $(p_1, p_2, q_1, q_2)$  во времени  $t$  происходит в трехмерной области. Сечение Пуанкаре строится следующим образом. В фазовом пространстве выбирается некоторая двумерная поверхность (например,  $q_1 = 0$ ) и определяются последовательные пересечения фазовой траектории с какой-либо стороной этой поверхности. Множество точек пересечения образует сечение Пуанкаре.

Так как траектория лежит на трехмерной энергетической гиперповерхности  $H(q_1, q_2, p_1, p_2) = E$  в четырехмерном фазовом пространстве, то это уравнение при заданном значении полной энергии  $E$  определяет любую из четырех переменных, скажем  $p_1$ , как функцию трех остальных  $p_1 = p_1(E, p_2, q_1, q_2)$ .

Последовательные во времени пересечения фазовой траектории с поверхностью  $q_1 = 0$  будут распределены в ограниченной области на плоскости  $(p_2, q_2)$ . Пусть уравнения движения Гамильтона, кроме полной энергии  $H(q_1, q_2, p_1, p_2) = E$ , имеют дополнительный интеграл движения  $I(q_1, q_2, p_1, p_2) = I_0$  ( $I_0 = const$ ). Тогда из этих двух интегралов  $E, I_0$  находим, что переменные  $p_2$  и  $q_2$  связаны функциональной зависимостью  $p_2 = p_2(E, I_0, q_2)$ . Следовательно, при заданных значениях  $E, I_0$  точки пересечения фазовой траектории с поверхностью  $q_1 = 0$  должны лежать на некоторых замкнутых кривых в плоскости  $(p_2, q_2)$ . В этом случае движение является регулярным, а система – интегрируемой.

Если система уравнений не имеет дополнительного интеграла движения, то есть является неинтегрируемой по теореме Лиувилля, то точки пересечения не будут лежать на кривой  $(q_2, p_2)$ , а случайно распределены в допустимой области фазового пространства. Эта фазовая траектория является хаотической, а исследуемая система – неинтегрируемой.

В разделе 2.2 на основе разработанного алгоритма и составленной программы SPOMA проведены символьно-численные вычисления сечений

Пуанкаре для восьми гамильтоновых систем и выполнено их сравнение с сечениями Пуанкаре, полученными прямыми численными расчетами.

Ниже представлены результаты для одной гамильтоновой системы:

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2) + bq_1^2q_2^2 + c(q_1^2 + q_2^2)^2, \quad (18)$$

где  $b, c$  – параметры.

На рис. 2-4 представлены сечения Пуанкаре при разных значениях энергии и параметров. Из проведенных сравнений сечений Пуанкаре, полученных разными методами, видно, что предложенный аналитический метод позволяет восстановить структуру фазового пространства для консервативных гамильтоновых систем с двумя степенями свободы в области энергий, при которых заданная система находится в регулярном режиме движения.

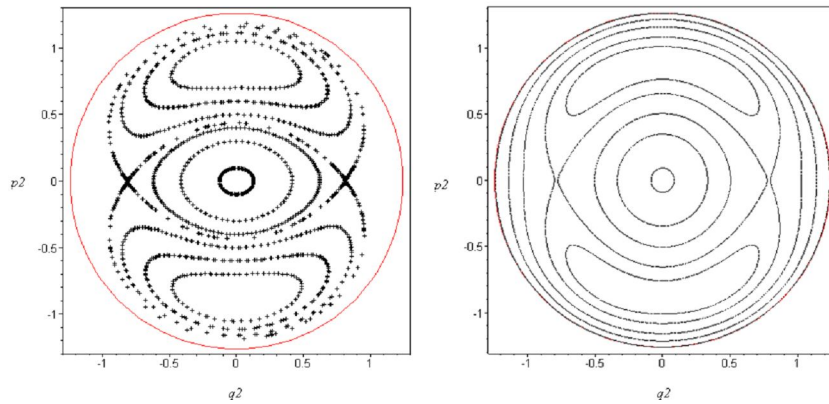


Рис. 2. Сечения Пуанкаре, полученные прямым численным решением уравнений движения (слева) и с помощью интеграла движения (справа) при полной энергии  $E = 0.8$  и начальных данных:  $b = 0.5, c = 0.01, (p_1, p_2, q_1, q_2) = (0, 0.1, 0, 0), (0, 0.3, 0, 0), (0, 0.4, 0, 0), (0, 0.5, 0, 0), (0, 0.7, 0, 0), (0, 0, 0, -0.812)$  и  $I_0 = 0.01, 0.02, 0.03, 0.0396, 0.045$

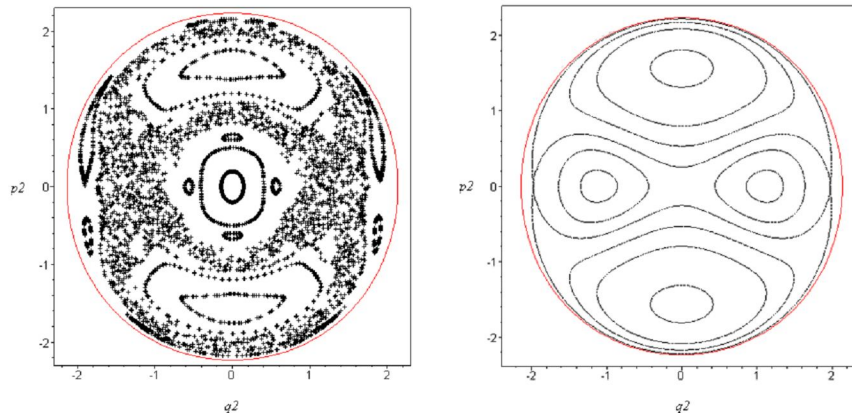


Рис. 3. То же, но при полной энергии  $E = 2.5$  и начальных данных:  $b = 0.5, c = 0.01, (p_1, p_2, q_1, q_2) = (0, 0.2, 0, 0), (0, 0.5, 0, 0), (0, 0.6, 0, 0), (0, -0.45, 0, -1.85), (0, 1, 0, 0), (0, 1.2, 0, 0), (0, 0, 0, -1.9), (0, 1.38, 0, 0)$  и  $I_0 = -1.1, -0.5, -0.2, 0.0123, 0.16, 0.3, 0.4$

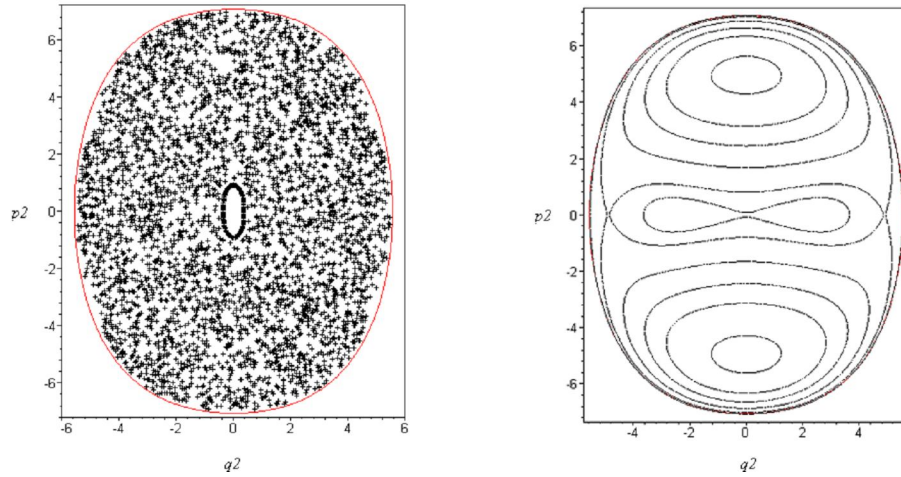


Рис. 4. Тоже, но при полной энергии  $E = 25$  и начальных данных:  $b = 0.5$ ,  $c = 0.01$   $(p_1, p_2, q_1, q_2) = (0, 0.6, 0, 0.3)$ ,  $(0, 0, 0, -4)$ ,  $(0, 3.6, 0, -4.5)$ ,  $(0, 1.6, 0, 0)$ ,  $(0, -2.6, 0, -4.9)$ ,  $(0, -3.4, 0, 2.55)$ ,  $(0, -2.1, 0, -3)$  и  $I_0 = -2200, -1500, -1000, -500, -125, -6$

В разделе 2.3 получен квантовый аналог классической нормальной формы для конкретной гамильтоновой системы, проведено его квантование согласно правилу Вейля и получена формула спектра для квантового аналога, а также показано, что эту же классическую гамильтонову систему можно проквантовать ее сведением к уравнению Матье.

### Глава 3. Алгоритмы и программы построения функции Грина для краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений II порядка.

В разделе 3.1 даны теоретические формулы для построения функции Грина для краевых задач с дифференциальными уравнениями второго порядка, для которых система Maple позволяет найти в явном виде два линейно независимых решения.

Рассмотрена следующая краевая задача

$$p_0(x)y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0, \quad (19a)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} \alpha_{1,0}y(a) + \alpha_{1,1}y'(a) + \beta_{1,0}y(b) + \beta_{1,1}y'(b) &= 0, \\ \alpha_{2,0}y(a) + \alpha_{2,1}y'(a) + \beta_{2,0}y(b) + \beta_{2,1}y'(b) &= 0, \end{aligned} \quad (19b)$$

где  $p_0(x)$ ,  $p_1(x)$ ,  $p_2(x)$  есть непрерывные функции вместе с их производными на отрезке  $[a, b]$ , а  $\alpha_{1,0}$ ,  $\alpha_{1,1}$ ,  $\alpha_{2,0}$ ,  $\alpha_{2,1}$ ,  $\beta_{1,0}$ ,  $\beta_{1,1}$ ,  $\beta_{2,0}$ ,  $\beta_{2,1}$  – заданные числа,  $\sum_i \sum_k \alpha_{ik}^2 \neq 0$ ,  $\sum_i \sum_k \beta_{ik}^2 \neq 0$ ,  $i = 1, 2$ ,  $k = 0, 1$ .

Предположим, что в классе непрерывных решений вместе с производными данная задача на отрезке  $[a, b]$  имеет только тривиальное решение. Однако если ослабить требование непрерывности первой производной, например, в точке  $x = \xi$ ,  $a \leq \xi \leq b$ , то для краевой задачи существует единственное ненулевое решение, которое называется функцией Грина  $G(x, \xi)$ . При условии, что краевая задача имеет только тривиальное решение  $y(x) \equiv 0$ , то существует, как указано выше, одна и только одна функция Грина.

Пусть краевая задача такова, что система Maple позволяет получить в

явном аналитическом виде два линейно независимых решения  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$  исходного дифференциального уравнения (19а), в этом случае функцию Грина представим в виде

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \sum_{k=1}^2 (A_k(\xi) + B_k(\xi)) \cdot y_k(x), & a \leq x \leq \xi \leq b \\ \sum_{k=1}^2 (A_k(\xi) - B_k(\xi)) \cdot y_k(x), & a \leq \xi \leq x \leq b \end{cases}. \quad (20)$$

Из выражения (20) видно, что для построения функции Грина необходимо определить коэффициенты-функции  $A_k(\xi)$ ,  $B_k(\xi)$ . Для определения коэффициентов-функций  $B_k(\xi)$  используем свойства функции Грина, в частности, ее непрерывность и скачок первой производной по  $x$  в точке  $x = \xi$  и получаем систему

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^2 B_k(\xi) y_k(\xi) = 0 \\ \sum_{k=1}^2 B_k(\xi) y'_k(\xi) = -\frac{1}{2p_0(\xi)} \end{cases}. \quad (21)$$

Определитель полученной неоднородной линейной алгебраической системы (21) не равен нулю, так как он есть вронскиан двух линейно независимых решений  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$ . Поэтому система определена и имеет единственное решение  $B_1(\xi)$ ,  $B_2(\xi)$ .

Используя краевые условия (19б), для определения коэффициентов-функций  $A_k(\xi)$  получаем следующую систему:

$$\begin{cases} A_1(\xi) [\alpha_{1,0} y_1(a) + \alpha_{1,1} y'_1(a) + \beta_{1,0} y_1(b) + \beta_{1,1} y'_1(b)] + \\ A_2(\xi) [\alpha_{1,0} y_2(a) + \alpha_{1,1} y'_2(a) + \beta_{1,0} y_2(b) + \beta_{1,1} y'_2(b)] = \\ B_1(\xi) [\alpha_{1,0} y_1(a) + \alpha_{1,1} y'_1(a) - \beta_{1,0} y_1(b) - \beta_{1,1} y'_1(b)] + \\ B_2(\xi) [\alpha_{1,0} y_2(a) + \alpha_{1,1} y'_2(a) - \beta_{1,0} y_2(b) - \beta_{1,1} y'_2(b)] \\ A_1(\xi) [\alpha_{2,0} y_1(a) + \alpha_{2,1} y'_1(a) + \beta_{2,0} y_1(b) + \beta_{2,1} y'_1(b)] + \\ A_2(\xi) [\alpha_{2,0} y_2(a) + \alpha_{2,1} y'_2(a) + \beta_{2,0} y_2(b) + \beta_{2,1} y'_2(b)] = \\ B_1(\xi) [\alpha_{2,0} y_1(a) + \alpha_{2,1} y'_1(a) - \beta_{2,0} y_1(b) - \beta_{2,1} y'_1(b)] + \\ B_2(\xi) [\alpha_{2,0} y_2(a) + \alpha_{2,1} y'_2(a) - \beta_{2,0} y_2(b) - \beta_{2,1} y'_2(b)] \end{cases}. \quad (22)$$

Если определитель этой системы не равен нулю, то находим коэффициенты-функции  $A_1(\xi)$ ,  $A_2(\xi)$ .

Подставляя найденные коэффициенты-функции  $A_1(\xi)$ ,  $A_2(\xi)$ ,  $B_1(\xi)$ ,  $B_2(\xi)$  в выражение (20), находим функцию Грина в аналитическом виде. Функция Грина позволяет решить неоднородную краевую задачу, а также задачу на собственные значения.

В разделе 3.2 приведен разработанный алгоритм программы GRESA для символьно-численного построения функции Грина однородной краевой задачи (19).

В разделе 3.3 приведены расчеты функции Грина для конкретных краевых задач с помощью разработанной программы GRESA. В этом разделе найдены решения четырех неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка. Здесь же решена задача на собственные значения:

$$\frac{d}{dx} \left[ (1 + \alpha x)^4 \frac{dy}{dx} \right] + \lambda^2 y = 0 \quad (23)$$

с однородными краевыми условиями

$$y(0) = 0, \quad y(L) = 0.$$

Эта задача описывает продольный изгиб стержня, имеющего форму усеченного конуса. В этой задаче необходимо определить наименьшую критическую силу, при которой стержень теряет устойчивость. Критическая сила равна произведению модуля Юнга на наименьшее собственное число. Параметр  $\alpha$  определяет различие диаметров усеченного конуса.

В этой задаче два линейно независимых  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$  решения имеют вид:

$$y_1(x) = \alpha \cos \left[ \frac{\lambda}{\alpha(1 + \alpha x)} \right] + \frac{\lambda}{1 + \alpha x} \sin \left[ \frac{\lambda}{\alpha(1 + \alpha x)} \right], \quad (24a)$$

$$y_2(x) = -\alpha \sin \left[ \frac{\lambda}{\alpha(1 + \alpha x)} \right] + \frac{\lambda}{1 + \alpha x} \cos \left[ \frac{\lambda}{\alpha(1 + \alpha x)} \right]. \quad (24b)$$

Если значения параметра  $\lambda$  не равны собственным значениям, которые определяются равенством нулю следующего определителя

$$U = \begin{vmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ y_1(L) & y_2(L) \end{vmatrix}, \quad (25)$$

то получена функция Грина в следующем виде:

$$G(x, \xi) = \begin{cases} G_L(x, \xi), & 0 \leq x \leq \xi \leq L \\ G_R(x, \xi), & 0 \leq \xi \leq x \leq L \end{cases}, \quad (26a)$$

где

$$G_L(x, \xi) = - \frac{\sin[z_1(x, \lambda)] \cdot \sin[z_2(\xi, \lambda)] (\alpha^2 + \alpha^3 x - \alpha^2 x \operatorname{ctg}[z_1(x, \lambda)] \lambda + \lambda^2)}{\sin[z(L, \lambda)] (1 + \alpha \xi) (1 + \alpha x) \lambda^3 (\alpha^2 + \alpha^3 L - \alpha^2 L \operatorname{ctg}[z(L, \lambda)] \lambda + \lambda^2)} \cdot (\alpha^2 + \alpha^3 L + \xi \alpha^3 + \xi \alpha^4 L - \alpha^2 L \operatorname{ctg}[z_2(\xi, \lambda)] \lambda + \alpha^2 \xi \operatorname{ctg}[z_2(\xi, \lambda)] \lambda + \lambda^2), \quad (26b)$$

$$G_R(x, \xi) = - \frac{\sin[z_1(\xi, \lambda)] \cdot \sin[z_2(x, \lambda)] (\alpha^2 + \xi \alpha^3 - \alpha^2 \xi \operatorname{ctg}[z_1(\xi, \lambda)] \lambda + \lambda^2)}{\sin[z(L, \lambda)] (1 + \alpha \xi) (1 + \alpha x) \lambda^3 (\alpha^2 + \alpha^3 L - \alpha^2 L \operatorname{ctg}[z(L, \lambda)] \lambda + \lambda^2)} \cdot (\alpha^2 + \alpha^3 L + x \alpha^3 + x \alpha^4 L - \alpha^2 L \operatorname{ctg}[z_2(x, \lambda)] \lambda + \alpha^2 x \operatorname{ctg}[z_2(x, \lambda)] \lambda + \lambda^2), \quad (26b)$$

$$\text{где } z(L, \lambda) = \frac{\lambda L}{1 + \alpha L}, \quad z_1(x, \lambda) = \frac{\lambda x}{1 + \alpha x}, \quad z_2(\xi, \lambda) = \frac{\lambda(-\xi + L)}{(1 + \alpha L)(1 + \alpha \xi)}.$$



Если детерминант (25) не равен нулю, то существуют собственные значения  $\lambda$ , которые находятся из решения найденного нами следующего трансцендентного уравнения:

$$\lambda^2 - \alpha^2 L \operatorname{ctg}\left(\frac{\lambda L}{1 + \alpha L}\right) \lambda + \alpha^2 + \alpha^3 L = 0. \quad (27)$$

В книге Михлина приведена приближенная формула (в случае  $\alpha \ll 1$ ) для вычисления наименьшего собственного значения краевой задачи в виде:

$$\frac{1}{\lambda^4} = L^4 \left( \frac{1}{90} - \frac{2}{45} \alpha \right), \quad (28)$$

которая дает отклонение от точного значения меньше, чем на 5%.

Для конкретных значений параметров  $L=1$  и  $\alpha=0.01$  нами было проведено сравнение значения наименьшего собственного значения, полученного по точной формуле (27) с результатами, следующими из формулы Михлина (28). По формуле (27) была получена величина собственного значения равная  $\lambda = 3.17$ , а по формуле (28) –  $\lambda = 3.11$ , которые отличаются менее, чем на 2%.

В разделе 3.4 дан метод символьно-численного построения функции Грина для краевой задачи

$$p_0(x)y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0 \quad (29a)$$

с граничными условиями

$$y(a) = y(b) = 0, \quad (29б)$$

в которой дифференциальное уравнение (29a) допускает наличие особых регулярных точек.

В случае, если дифференциальное уравнение не содержит регулярных особых точек в окрестности точки  $x = x_0$ , то линейно независимые решения  $y_1$  и  $y_2$  могут быть представлены виде степенных рядов:

$$y_1(x) = 1 + \sum_{k=2} c_k^{(1)} (x - x_0)^k, \quad (30a)$$

$$y_2(x) = (x - x_0) + \sum_{k=2} c_k^{(2)} (x - x_0)^k. \quad (30б)$$

Коэффициенты  $c_k^{(1)}$ ,  $c_k^{(2)}$  определяются посредством подстановки рядов (30) в уравнение (29a) и приравниванием коэффициентов при различных степенях независимой переменной.

При наличии полюсов не выше второго порядка в точке  $x = x_0$  решение уравнения ищется в виде обобщенного ряда

$$y(x) = (x - x_0)^\rho \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k, \quad (c_0 \neq 0), \quad (31)$$

где показатель  $\rho$  находится из определяющего уравнения

$$\rho(\rho - 1) + a_0\rho + b_0 = 0, \quad (32)$$

а коэффициенты  $a_0$ ,  $b_0$  из разложений:

$$\frac{p_1(x)}{p_0(x)} = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k}{x-x_0}, \quad \frac{p_2(x)}{p_0(x)} = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} b_k (x-x_0)^k}{(x-x_0)^2}. \quad (33)$$

Если корни определяющего уравнения (32) различны ( $\rho_1 \geq \rho_2$ ), но их разность  $\rho_1 - \rho_2$  не равна целому положительному числу, то линейно независимые решения имеют вид:

$$y_1(x) = (x-x_0)^{\rho_1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(1)} (x-x_0)^k, \quad (c_0^{(1)} \neq 0), \quad (34a)$$

$$y_2(x) = (x-x_0)^{\rho_2} \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(2)} (x-x_0)^k, \quad (c_0^{(2)} \neq 0), \quad (34b)$$

в которых коэффициенты  $c_0^{(1)}$  и  $c_0^{(2)}$  остаются произвольными.

Если разность  $(\rho_1 - \rho_2)$  – целое положительное число, то одно решение, соответствующее корню  $\rho_1$ , по-прежнему имеет вид

$$y_1(x) = (x-x_0)^{\rho_1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(1)} \cdot (x-x_0)^k, \quad (c_0^{(1)} = 1), \quad (35)$$

а второе линейно независимое решение определяется рядом, содержащим логарифмический член:

$$y_2(x) = (x-x_0)^{\rho_2} \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(2)} \cdot (x-x_0)^k + \eta \cdot y_1(x) \cdot \ln(x-x_0). \quad (36)$$

Если случится, что  $\eta = 0$ , то второе линейно независимое решение будет иметь вид обобщенного степенного ряда.

В случае равенства  $\rho_1 - \rho_2 = 0$  одно частное решение уравнения имеет вид (34a), а второе – вид (36), в котором коэффициент  $\eta \neq 0$ .

Линейно независимые решения  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$  дифференциального уравнения (29a) при начальных условиях:

$$y_1(x): \begin{cases} y_1(x_0) = 1 \\ y_1'(x_0) = 0 \end{cases}, \quad y_2(x): \begin{cases} y_2(x_0) = 0 \\ y_2'(x_0) = 1 \end{cases}, \quad (37)$$

находим аналитически в среде Maple в виде, в общем, обобщенных степенных рядов и строим общее решение как

$$y(x) = C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x), \quad (38)$$

где  $C_1, C_2$  – константы.

Зная общее решение (38) и основные свойства функции Грина, находим ее для краевой задачи (29) следующим образом. Из общего решения находим частные решения  $u_1(x)$  и  $u_2(x)$ , которые удовлетворяют однородным краевым условиям  $u_1(a) = 0$  и  $u_2(b) = 0$ . Легко видеть, что такими частными решениями являются функции

$$u_1(x) = y_2(x), \quad u_2(x) = y_1(x) \cdot y_2(b) - y_1(b) \cdot y_2(x). \quad (39)$$

Тогда в соответствии с общими правилами функция Грина строится следующим образом

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{u_1(x)u_2(\xi)}{W(\xi)p_0(\xi)}, & a \leq x \leq \xi \leq b, \\ \frac{u_1(\xi)u_2(x)}{W(\xi)p_0(\xi)}, & a \leq \xi \leq x \leq b, \end{cases} \quad (40)$$

где

$$W(\xi) \equiv W[u_1, u_2] = \begin{vmatrix} u_1(\xi) & u_2(\xi) \\ u_1'(\xi) & u_2'(\xi) \end{vmatrix} \quad (41)$$

функциональный определитель Вронского.

В разделе 3.5 приведен алгоритм программы GRESSA построения функции Грина для краевой задачи (29), в общем, в виде обобщенных степенных рядов.

В разделе 3.6 представлены расчеты функции Грина для конкретных краевых задач (29) с помощью разработанной программы GRESSA, а также проведено сравнение полученной приближенной функции Грина с точной и получена величина погрешности вычислений.

Были получены функции Грина для шести краевых задач. Ниже рассмотрим одну из них:

$$y'' + y = 0 \quad (42a)$$

с граничными условиями

$$y(x=0) = 0, \quad y(x=1) = 0. \quad (42б)$$

С помощью разработанной программы GRESSA была получена приближенная функция Грина в виде рядов. Для краевой задачи (42) известна точная функция Грина.

На рис. 5 представлено сравнение результатов расчета значений точной функции Грина и вычисленной по нашей программе при учете членов степенного ряда до степени  $n = 3$ , включительно.

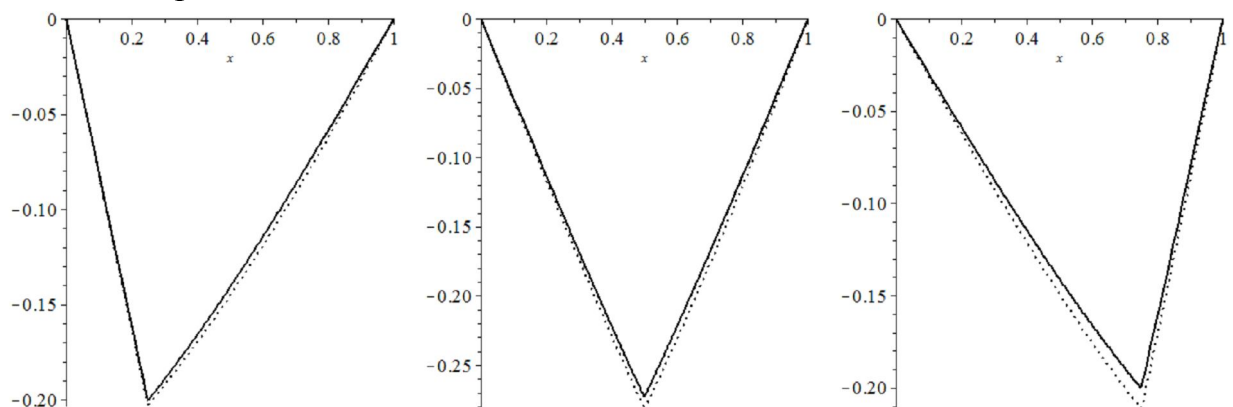


Рис 5. Теоретическая (сплошная) и вычисленная (точки) функция Грина для  $\xi = 0.25$  (слева),  $\xi = 0.5$  (в центре) и  $\xi = 0.75$  (справа) при  $n = 3$

Для степеней  $n = 15$  точная функция Грина и ее приближение совпадают с абсолютной точностью менее чем  $2,5 \cdot 10^{-14}$ , а с относительной – менее  $7 \cdot 10^{-11}\%$ .

**Глава 4. Алгоритмы и программы построения функции Грина для краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений III порядка.**

В разделе 4.1 разработан алгоритм символьно-численного построения функции Грина для краевой задачи

$$p_0(x)y''' + p_1(x)y'' + p_2(x)y' + p_3(x)y = 0, \quad (43a)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} \alpha_{1,0}y(a) + \alpha_{1,1}y'(a) + \alpha_{1,2}y''(a) + \beta_{1,0}y(b) + \beta_{1,1}y'(b) + \beta_{1,2}y''(b) &= 0, \\ \alpha_{2,0}y(a) + \alpha_{2,1}y'(a) + \alpha_{2,2}y''(a) + \beta_{2,0}y(b) + \beta_{2,1}y'(b) + \beta_{2,2}y''(b) &= 0, \\ \alpha_{3,0}y(a) + \alpha_{3,1}y'(a) + \alpha_{3,2}y''(a) + \beta_{3,0}y(b) + \beta_{3,1}y'(b) + \beta_{3,2}y''(b) &= 0 \end{aligned} \quad (43б)$$

где  $p_0(x)$ ,  $p_1(x)$ ,  $p_2(x)$ ,  $p_3(x)$  есть непрерывные функции вместе со своими производными на отрезке  $[a, b]$ ,  $\alpha_{ik}$ ,  $\beta_{ik}$  – заданные числа,  $\sum_i \sum_k \alpha_{ik}^2 \neq 0$ ,

$\sum_i \sum_k \beta_{ik}^2 \neq 0$ ,  $i=1,2,3$ ,  $k=0,1,2$ , в случае, когда в системе Maple имеется возможность получить в явном виде три линейно независимых решения дифференциального уравнения третьего порядка (43a).

Предположим, что в классе непрерывных решений вместе с первой и второй производными краевая задача (43) имеет только тривиальное решение  $y(x) \equiv 0$  и не существует другого решения. Однако, если ослабить требования непрерывности второй производной, например, в точке  $x = \xi$ ,  $a \leq \xi \leq b$ , то для краевой задачи (43) существует ненулевое решение, которое называется функцией Грина. Если краевая задача имеет только тривиальное решение  $y(x) \equiv 0$ , то существует одна и только одна функция Грина  $G(x, \xi)$ .

Пусть краевая задача такова, что система Maple позволяет получить в явном аналитическом виде три линейно независимых решения  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$ ,  $y_3(x)$  исходного дифференциального уравнения третьего порядка (43a).

Тогда в разработанной нами программе функция Грина ищется в виде:

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \sum_{k=1}^3 [A_k(\xi) + B_k(\xi)] \cdot y_k(x), & a \leq x \leq \xi \leq b, \\ \sum_{k=1}^3 [A_k(\xi) - B_k(\xi)] \cdot y_k(x), & a \leq \xi \leq x \leq b, \end{cases} \quad (44)$$

Из выражения (44) видно, что для построения функции Грина необходимо определить коэффициенты-функции  $A_k(\xi)$ ,  $B_k(\xi)$ . Для их определения используем свойства функции Грина, как и в случае краевой задачи для дифференциальных уравнений второго порядка. В результате получаем систему алгебраических уравнений для определения коэффициентов  $B_k(\xi)$ , определитель которой есть вронскиан трех линейно независимых решений  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$ ,  $y_3(x)$ . Поэтому система определена и имеет единственное решение  $B_k(\xi)$ ,  $k=1,2,3$ . Затем из граничных условий (43б) при уже известных коэффициентах-функциях  $B_1(\xi)$ ,  $B_2(\xi)$ ,  $B_3(\xi)$

находим, если они существуют, коэффициенты-функции  $A_1(\xi)$ ,  $A_2(\xi)$ ,  $A_3(\xi)$ .

Подставляя найденные коэффициенты-функции  $A_k(\xi)$ ,  $B_k(\xi)$  в выражение (44), находим функцию Грина в аналитическом виде.

В разделе 4.2 дано описание разработанного алгоритма программы GRETA построения функции Грина для краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка в явном аналитическом виде.

В разделе 4.3 приведены расчеты функции Грина для конкретных краевых задач с помощью разработанной программы GRETA. Здесь же найдены решения двух однородных и пяти неоднородных дифференциальных уравнений третьего порядка. Ниже представлены полученные результаты для следующего уравнения

$$y'''(x) + \frac{y''(x)}{x} - y'(x) - \frac{y(x)}{x} = f(x), \quad f(x) = 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 \quad (45)$$

с однородными граничными условиями  $y(1) = 0$ ,  $y(2) = 0$  и  $y'(1) = y'(2)$

Для однородного дифференциального уравнения (45) с теми же граничными условиями получена следующая точная функция Грина

$$G(x, \xi) = \begin{cases} G_L(x, \xi), & 0 \leq x \leq \xi \leq 1, \\ G_R(x, \xi), & 0 \leq \xi \leq x \leq 1, \end{cases} \quad (46a)$$

$$\begin{aligned} G_L(x, \xi) = \frac{1}{6} & \left[ -6x + 2e^{1-x+\xi} - e^{4-x-\xi}\xi + 2e^{3-x} + e^{x-2+\xi} + 8e^1x + 3e^{2+x-\xi} + 2e^\xi x\xi - \right. \\ & - 2e^{-\xi+3}x\xi - 8e^x - 2xe^2 + 3e^{2+x-\xi}\xi + 2e^{-1+\xi}x - 2e^{-\xi+3}x - 2e^{x+1-\xi} + 6e^{x-1} + \\ & - 2e^{-1+\xi}x\xi - e^{4-x-\xi} - 2e^\xi x - 3e^{-x+\xi} - e^{x-2+\xi}\xi + 2e^{-\xi+2}x\xi + 3e^{-x+\xi}\xi - 2e^{1-x+\xi}\xi \\ & \left. + 2e^{-\xi+2}x - 2e^{x+1-\xi}\xi \right] / (-e^2 + 2e - 1)\xi. \end{aligned} \quad (46b)$$

$$\begin{aligned} G_R(x, \xi) = -\frac{1}{6} & \left[ 4e^{1-x+\xi} + e^{4-x-\xi}\xi - 2e^{3-x} - e^{x-2+\xi} + 4e^1x + 8e^x + 3e^{x-\xi} \right. \\ & - 4xe^2 - 2e^\xi x\xi + 2e^{-\xi+3}x\xi - 2e^{-1+\xi}x + 2e^{-1+\xi}x\xi - 3e^{2-x+\xi} + e^{4-x-\xi} + 2e^\xi x \\ & + 2e^{-\xi+3}x - 4e^{x+1-\xi} - 6e^{x-1} + 3e^{2-x+\xi}\xi + e^{x-2+\xi}\xi - 2e^{-\xi+2}x\xi + 3e^{x-\xi}\xi - \\ & \left. - 2e^{-\xi+2}x - 4e^{1-x+\xi}\xi - 4e^{x+1-\xi}\xi \right] / (-e^2 + 2e - 1)\xi. \end{aligned} \quad (46b)$$

Решение неоднородной краевой задачи (45), которое дается интегралом

$$y(x) = \int_a^b f(\xi)G(x, \xi)d\xi, \quad (47)$$

имеет вид

$$\begin{aligned} y(x) = -\frac{1}{36}e^{-2x+2} & \left[ 5724e^{2x}x^3 - 288e^{2x}x^4 + 4032e^{-1+2x} + 4272e^x + 22417e^{-1+3x} + \right. \\ & + 5337e^{-3+3x} - 48e^{2x+2}x^4 + 954e^{2x+2}x^3 - 504e^{2x+2}x^2 + 1630e^{2x+2}x + 270x^5e^{2x} \\ & + 45x^5e^{-2+2x} + 12698e^{-1+2x}x + 2016e^{1+2x}x^2 - 3024e^{2x}x^2 - 9438e^{2x}x + 4032e^{1+2x} \\ & \left. + 192e^{1+2x}x^4 - 8540e^{3x} - 1008e^{-2+2x} - 9613e^{x+1} - 4776e^{-2+2x}x + 192e^{-1+2x}x^4 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -3816e^{1+2x}x^3 + 2016e^{-1+2x}x^2 - 6048e^{2x} - 48e^{-2+2x}x^4 - 504e^{-2+2x}x^2 + 954e^{-2+2x}x^3 \\
& -180x^5e^{-1+2x} + 45x^5e^{2x+2} - 180x^5e^{1+2x} - 3816e^{-1+2x}x^3 - 1069e^{x+3} + \\
& + 6410e^{x+2} - 114e^{1+2x}x - 1008e^{2x+2} - 19214e^{-2+3x} ] / (-e^2 + 2e - 1)^2. \quad (48)
\end{aligned}$$

В разделе 4.4 представлена методика построения функции Грина в виде степенных рядов для дифференциального уравнения третьего порядка с заданными граничными условиями.

В разделе 4.5 дано описание разработанного алгоритма программы GRETSA для символьно-численного построения функции Грина краевых задач для уравнений третьего порядка в виде степенных рядов.

В разделе 4.6 приведены расчеты функции Грина для конкретных краевых задач третьего порядка с помощью разработанной программы GRETSA, а также проведено сравнение полученной приближенной функции Грина с точной (рис. 6.) для краевой задачи

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0 \quad (49a)$$

с граничными условиями

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0, \quad y''(0) = 0. \quad (49б)$$

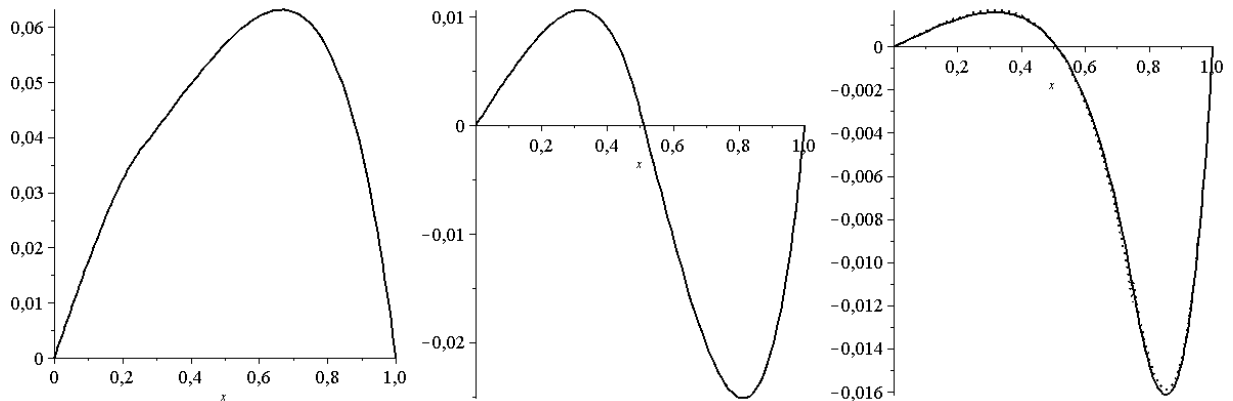


Рис. 6. Теоретически (сплошная) и практически вычисленные (точки) функции Грина для  $\xi = 0.25$  (слева),  $\xi = 0.5$  (центр) и  $\xi = 0.75$  (справа) при  $n = 12$

Из приведенных расчетов следует, что полученная нами приближенная функция Грина отличается от точной на 1,3% и  $6 \cdot 10^{-3}\%$  при  $n = 13$  и  $n = 16$ , соответственно.

В заключении кратко сформулированы основные результаты, полученные в диссертационной работе.

## ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

1) Представлен разработанный алгоритм получения нормальной формы и имеющихся приближенных интегралов движения методом Биркгофа-Густавсона для автономной гамильтоновой системы с  $n$  степенями свободы, на основе которого составлена программа BIGMA в среде Maple.

2) С ее помощью проведены символьные вычисления нормальной формы и имеющихся приближенных интегралов движения для некоторых гамильтоновых систем с двумя, тремя и четырьмя степенями свободы.

3) Выполнены расчеты сечений Пуанкаре для двумерных гамильтоновых систем в среде Maple и проведено сравнение с сечениями Пуанкаре, полученными прямыми непосредственными расчетами. Показано хорошее согласие результатов расчета, полученными обоими методами.

4) Выполнена процедура квантования согласно правилу Вейля и с помощью уравнения Матье конкретной гамильтоновой системы.

5) Разработан алгоритм и составлена программа GRESA в системе Maple для символьно-численного построения функции Грина краевых задач дифференциальных уравнений второго порядка, для которых система Maple позволяет найти в явном виде два линейно независимых решения, и проведены расчеты функции Грина для конкретных краевых задач с помощью разработанной программы.

6) Разработан алгоритм и составлена программа GRESSA в системе Maple для символьно-численного построения функции Грина краевых задач дифференциальных уравнений второго порядка в виде обобщенных степенных рядов и проведены расчеты функции Грина для конкретных краевых задач с помощью разработанной программы.

7) Разработан алгоритм и составлена программа GRETA в системе Maple для символьно-численного построения функции Грина краевых задач дифференциальных уравнений третьего порядка, для которых система Maple позволяет найти в явном виде три линейно независимых решения, и проведены расчеты функции Грина для конкретных краевых задач с помощью разработанной программы.

8) Разработан алгоритм и составлена программа GRETSA в системе Maple для символьно-численного построения функции Грина краевых задач линейных дифференциальных уравнений третьего порядка, не имеющих особых точек, в виде степенных рядов и проведены расчеты функции Грина для конкретных краевых задач с помощью разработанной программы.

## ОСНОВНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи в изданиях, входящих в перечень, рекомендованный ВАК РФ

1. Беляева И.Н. Алгоритм символьно-численного вычисления функции Грина дифференциальных уравнений второго порядка / Беляева И.Н., **Богачев В.Е.**, Чеканов Н.А. // Вестник российского университета дружбы народов. Серия: математика, информатика, физика, 2012. – № 3 – с. 43-51

2. **Богачев В.Е.** Символьно-численные расчеты нормальной формы, интеграла движения и сечений Пуанкаре для консервативных двумерных гамильтоновых систем / Богачев В.Е., Чеканов Н.А. // Вычислительные технологии, 2012 – т. 17. – № 4 – с. 3-13.

Статьи в журналах и в материалах и сборниках трудов научных конференций

3. **Богачев В.Е.** Классическая и квантовая нормальная форма двумерного гамильтониана с дискретной  $C4v$  симметрией / В.Е. Богачев // Научные труды Международной молодежной научной конференции XXXVI Гагаринские чтения, Москва – 2010 – т. 5. – с. 62-63.

4. **Богачев В.Е.** Приближенный спектр одной неинтегрируемой двумерной системы / В.Е. Богачев, Н.А. Чеканов // Сборник научных трудов VIII Международной научно-практической конференции «Фундаментальные и прикладные исследования в системе образования», Тамбов – 2010 – с. 264-266.

5. **Богачев В.Е.** Квантование классических гамильтоновых систем при помощи нормальной формы / В.Е. Богачев, Н.А. Чеканов // Сборник научных трудов шестой региональной научно-практической конференции студентов и аспирантов, Старый Оскол – 2010 – т. 2. – с. 29-32.

6. **Богачев В.Е.** Символьно-численные вычисления нормальной формы Биркгофа-Густавсона и формальных интегралов движения для гамильтоновых систем и их применение к построению сечений Пуанкаре / В.Е. Богачев, // Сборник материалов XII Международной научно-практической конференции «Наука и современность – 2011», Новосибирск – 2011 – ч. 3. – с. 12-18.

7. **Bogachev V.E.** Character calculations of approximate integrals of motion for Hamiltonian systems with  $n$  degrees of freedom / V.E. Bogachev, N.A. Chekanov // Book of abstracts 3rd International conference on «Quantum electrodynamics and statistical physics», Kharkov – 2011 – p. 216-217.

8. **Богачев В.Е.** MAPLE программа символьно-численных вычислений нормальной формы и интегралов движения гамильтоновых систем с произвольным числом степеней свободы / В.Е. Богачев, Н.А. Чеканов // Вестник Херсонского национального технического университета, 2011 – 3(42), с. 93-98.

9. **Богачев В.Е.** Алгоритмы и программы символьно-численных преобразований классических функций Гамильтона / В.Е. Богачев, Н.А. Чеканов // Сборник научных работ Всероссийского конкурса научно-исследовательских работ студентов и аспирантов в области информатики и информационных технологий в рамках всероссийского фестиваля науки, Белгород, – 2011 – т. 1. – с. 406-419.

10. **Bogachev V.E.** Symbol calculations the approximate integrals of motion for Hamiltonian systems with  $n$  degrees of freedom / V.E. Bogachev, N.A. Chekanov // Вопросы атомной науки и техники, 2012 – № 1 – с. 351-354.

11. **Богачев В.Е.** Компьютерное моделирование сечений Пуанкаре для консервативных гамильтоновых систем с двумя степенями свободы / В.Е. Богачев, Н.Н. Чеканова, Н.А. Чеканов // Прикладная геометрия и инженерная графика (спецвыпуск) Межведомственный научно-технический сборник, 2012 – № 89 – с. 377-381.



12. Беляева И.Н. Символьно-численные вычисления функции Грина обыкновенных дифференциальных уравнений второго и третьего порядков / И.Н. Беляева, **В.Е. Богачев**, Н.А. Чеканов // Вестник Херсонского национального технического университета, 2012 – 2(45) – с. 50-56.

13. Беляева И.Н. Символьно-численная нормализация конечномерных гамильтоновых систем / И.Н. Беляева, **В.Е. Богачев**, Н.А. Чеканов // Третья международная конференция «Математическое моделирование и дифференциальные уравнения»: тезисы докладов, Брест – 2012 – с. 104.

14. Беляева И.Н. Символьно-численная нормализация конечномерных гамильтоновых систем / И.Н. Беляева, **В.Е. Богачев**, Н.А. Чеканов // Математическое моделирование и дифференциальные уравнения. Mathematical modeling and differential equation: труды третьей международной научной конференции, Брест, 2012 – с. 76-90.

15. **Богачев В.Е.** Алгоритм символьно-численного построения функции Грина для обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка / В.Е. Богачев // Теория и практика системного анализа. Сборник трудов всероссийской молодежной конференции, Белгород, 2012. – с. 22-27.

#### Свидетельства о государственной регистрации программы для ЭВМ

16. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ, №2011610224, «Программа нормализации гамильтоновых систем с произвольным числом степеней свободы в среде MAPLE», **Богачев В.Е.**, Чеканов Н.А. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 11 января 2011 года.

17. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ, №2011616109, «MAPLE программа вычисления нормальной формы Биркгофа-Густавсона и независимых интегралов движения для гамильтоновой системы с произвольным числом степеней свободы», **Богачев В.Е.**, Чеканов Н.А. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 5 августа 2011 года.